Επαναληπτικό Θέμα στα Μαθηματικά
Γ Λυκείου κατεύθυνσης

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: Z , w

Αν $Z^2 - \bar{Z}^2 = 2|Z|^2 i$

α. Να δειχθεί ότι : $Z = i\,\bar{Z}$

β. Να βρεθεί ο γ.τ των εικόνων των Ζ.

γ. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο με κορυφές O(0,0) , A(Z), B($\bar{Z}$) , είναι ορθογώνιο στο Ο και ισοσκελές.

δ. Αν ισχύει ότι: $e^{|Z|.x} \ge x^3+x^2+2x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ να δειχθεί ότι:

i. $|Z|=2$ και

ii. υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $Z^2 - \lambda Z + 4 = 0$

ε. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|w+i|^{10}x^3-|1+i\,w|^5x^2+x-1}{x^2-1}=2$ να δειχθεί ότι ο w δεν είναι πραγματικός αριθμός.

στ. Να δειχθεί ότι η εξίσωση : $|Z|.x^5+|w|.x^3=|Z-w|$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [0,1].

κ. Αν Z_1, Z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $Z^2 - 6συνθ.\,Z + 9συν^2θ + ημ^2θ = 0$,$θ\in\mathbb{R}$

i. να λυθεί η εξίσωση.

ii. να δειχθεί ότι οι εικόνες των ριζών κινούνται σε μία έλλειψη.

iii. να βρεθεί η μέγιστη απόσταση των ριζών.

Απαντήσεις

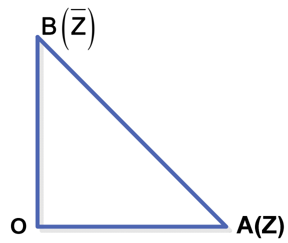
α. $Z^2 - \bar{Z}^2 = 2|Z|^2 i \Leftrightarrow Z^2-\bar{Z}^2-2|Z|^2 i=0 \Leftrightarrow Z^2-\bar{Z}^2-2Z.\bar{Z}\,i=0 \Leftrightarrow Z^2-2Z.(\bar{Z}\,i)+(\bar{Z}.i)^2=0 \Leftrightarrow (Z-\bar{Z}\,i)^2=0$

$\Leftrightarrow Z-\bar{Z}.i=0 \Leftrightarrow Z=\bar{Z}.i$.

β. Έστω Z=x+yi και M(x,y) η εικόνα του Z και C ο γ.τ των Μ.

$M\in C \Leftrightarrow x+yi=(x-yi).i \Leftrightarrow x+yi=y+xi \Leftrightarrow x=y$. Άρα C: y=x δηλαδή

ο γ.τ είναι η ευθεία ε: y=x



γ. Αρκεί να δειχθεί :

i. $(OA)^2+(OB)^2=(AB)^2 \Leftrightarrow |Z|^2+|\bar{Z}|^2=|Z-\bar{Z}|^2 \Leftrightarrow |Z|^2+|Z|^2=\left|Z-\frac{Z}{i}\right|^2 \Leftrightarrow$

$2|Z|^2=|Z+Z\,i|^2 \Leftrightarrow 2|Z|^2=|Z(1+i)|^2 \Leftrightarrow 2|Z|^2=|Z|^2\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$2|Z|^2=2|Z|^2$ που ισχύει άρα το τρίγωνο (ΟΑΒ) είναι ορθογώνιο.

ii. επειδή $|Z|=|\bar{Z}| \Leftrightarrow (OA)=(OB)$ άρα το τρίγωνο (ΟΑΒ) είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

δ. i. Αν $f(x)= e^{|Z|.x} - x^3 - x^2 - 2x - 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ τότε η f(x) είναι συνεχής (πράξεις συνεχών) και

$f(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)\ge f(0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ δηλαδή το f(0) είναι ελάχιστο της f και από θεώρημα Fermat

$f'(0)=0$.

Όμως $f'(x)=|Z|.\,e^{|Z|.x} - 3x^2 - 2x - 2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, αφού $f'(x)=0 \Leftrightarrow |Z|.e^0 -0 -0 - 2=0 \Leftrightarrow |Z|=2$.

ii. Αφού $|Z|=2 \Leftrightarrow |Z|^2=4 \Leftrightarrow Z.\bar{Z}=4 \Leftrightarrow \bar{Z}=\frac{4}{Z}$ τότε $\frac{Z^2+4}{Z}=\frac{Z^2}{Z}+\frac{4}{Z}=Z+\frac{4}{Z}=Z+\bar{Z}=2\,Re(Z)=\lambda\in\mathbb{R}$

άρα υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\frac{Z^2+4}{Z}=\lambda \Leftrightarrow Z^2+4=\lambda Z \Leftrightarrow Z^2-\lambda Z+4=0$.

ε. Έστω $g(x)=\frac{|w+i|^{10}x^3-|1+i\,w|^5x^2+x-1}{x^2-1}$ με $x\neq 1$ τότε $\lim\limits_{x\to1}g(x)=2$ και $|w+i|^{10}x^3-|1+i\,w|^5x^2+x-1=(x^2-1)g(x)$ τότε

$\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)g(x)=0.2=0$ άρα και $\lim\limits_{x\to1}\left(|w+i|^{10}x^3-|1+i\,w|^5x^2+x-1\right)=0 \Leftrightarrow |w+i|^{10}-|1+i\,w|^5=0 \Leftrightarrow$

$$|w+i|^{10}=|1+i\,w|^5 \Leftrightarrow |w+i|^2=|1+i\,w| \quad (1)$$

Έστω ότι $w\in\mathbb{R}$ τότε θα υπάρχει κάποιος $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $w=\alpha$ τότε η (1) δίνει $|\alpha+i|^2=|1+\alpha\,i| \Leftrightarrow \alpha^2+1^2=\sqrt{\alpha^2+1} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{\alpha^2+1}=1 \Leftrightarrow \alpha^2+1+=1 \Leftrightarrow \alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \Leftrightarrow w=0$$

Τότε η $g(x)=\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+1}{x+1}$ και $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{2}{2}=1$ άτοπο άρα $w\notin\mathbb{R}$

στ. Η εξίσωση γράφεται $|Z|x^5+|w|x^3-|Z-w|=0$

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=|Z|x^5+|w|x^3-|Z-w|$ που είναι συνεχής (σαν πολυωνυμική)

$\varphi(0)=-|Z-w|\le 0$

$\varphi(1)=|Z|+|w|-|Z-w|\ge 0$ αφού από την τριγωνική ανισότητα είναι : $|Z-w|\le |Z|+|w| \Leftrightarrow \varphi(0).\varphi(1)\le 0$

- Αν $\varphi(0).\varphi(1)<0$ τότε από **Θεώρημα Bolzano** , υπάρχει $x_o\in(0,1)$;ώστε $\varphi(x_o)=0$
- Αν $\varphi(0).\varphi(1)=0 \Leftrightarrow \varphi(0)=0$;ή $\varphi(1)=0$ άρα $x_o=0$ ή $x_o=1$

Άρα υπάρχει $x_o\in[0,1]$ ώστε $\varphi(x_o)=0$

κ. i. $Z^2-6\sigma\upsilon\nu\theta.Z+9\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=0$ είναι $\Delta=36\sigma\upsilon\nu^2\theta-4(9\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)=36\sigma\upsilon\nu^2\theta-36\sigma\upsilon\nu^2\theta-4\eta\mu^2\theta=-4\eta\mu^2\theta\le 0$

$$Z_{1,2}=\frac{6\sigma\upsilon\nu\theta\pm 2i\eta\mu\theta}{2}=3\sigma\upsilon\nu\theta\pm i\,\eta\mu\theta.$$

ii. Αν $N(x,y)$ η εικόνα μιας ρίζας τότε : $\begin{cases}x=3\sigma\upsilon\nu\theta\\ y=\pm\eta\mu\theta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x}{3}\\ \eta\mu\theta=\pm y\end{cases}$ και επειδή $\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+y^2=1 \Leftrightarrow$

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$ άρα οι εικόνες των ριζών κινούνται στην έλλειψη $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$

η έλλειψη έχει κέντρο $O(0,0)$, $\alpha=3$, $\beta=1$, $\gamma=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ και εστίες $E'(-2\sqrt{2},0)$, $E(2\sqrt{2},0)$.

iii. Επειδή οι εικόνες N_1, N_2 των ριζών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα xx΄ (αφού οι ρίζες είναι συζυγείς) ισχύει ότι: $(N_1N_2)\le(BB') \Leftrightarrow |Z_1-Z_2|\le 2$ άρα

$$|Z_1-Z_2|_{max}=2\ .$$